Primer teorema fundamental del cálculo: caso especial cuando los límites de integración son funciones

Si

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt,$$

entonces

$$F(x) = \int_{g(x)}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{h(x)} f(t)dt$$

donde c es alguna constante, $g(x) < c < h(x)$. Intercambiando los límites de integración de la primera integral para que la función $g(x)$ quede en el límite superior:

$$F(x) = -\int_{c}^{g(x)} f(t)dt + \int_{c}^{h(x)} f(t)dt$$

Ahora estamos en condiciones de derivar aplicando el primer teorema fundamental del cálculo. La derivada será:

$$F'(x) = -f(g(x)).g'(x) + f(h(x)).h'(x).$$

Ejemplo 1 :

$$G(x) = \int_{x^3}^{x^2} \operatorname{sen}(2t)dt$$

$$G(x) = \int_{x^3}^{c} \operatorname{sen}(2t)dt + \int_{c}^{x^2} \operatorname{sen}(2t)dt$$

$$G(x) = -\int_{c}^{x^3} \operatorname{sen}(2t)dt + \int_{c}^{x^2} \operatorname{sen}(2t)dt$$

Por lo tanto:

$$G'(x) = \operatorname{sen}(2x^3).3x^2 + sen(2x^2).2x$$

Ejemplo 2:

$$F(x) = \cos(x) \int_{\ln(x)}^{x} e^{3t^3} dt$$

Aplicando la derivada del producto:

$$F'(x) = \left(\frac{d}{dx}\cos(x)\right).\int_{\ln(x)}^{x} e^{3t^3} dt + \cos(x)\left(\frac{d}{dx}\int_{\ln(x)}^{x} e^{3t^3} dt\right)$$

$$F'(x) = -\operatorname{sen}(x)\int_{\ln(x)}^{x} e^{3t^3} dt + \cos(x)\left(\frac{d}{dx}\int_{\ln(x)}^{x} e^{3t^3} dt\right)$$

La derivada en el lado derecho la calculamos como está explicado antes:

$$\int_{\ln(x)}^{x} e^{3t^3} dt = -\int_{c}^{\ln(x)} e^{3t^3} dt + \int_{c}^{x} e^{3t^3} dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\ln(x)}^{x} e^{3t^3} dt = -e^{3[\ln(x)]^3}.\frac{1}{x} + e^{3x^3}.1$$

Entonces:

$$F'(x) = -\text{sen}(x) \int_{\ln(x)}^{x} e^{3t^3}\, dt + \cos(x) \left(-e^{3[\ln(x)]^3} . \frac{1}{x} + e^{3x^3} \right)$$

Fin.