Integración por partes

Aclaración: en adelante no voy a escribir la constante aditiva "$+C$" de la integración en cada paso, sino sólo en el resultado final.
En adelante intentaremos siempre encontrar una función u y un diferencial dv en la integral que queremos calcular, y luego aplicar la integración por partes, que con esta notación se escribe como

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Acá resumo tres casos principales en donde se usa la integración por partes y cómo usarlos:
Caso 1: Integrar una función complicada de integrar. Hay algunas funciones que, a pesar de que hagamos cualquier sustitución, es muy difícil hallar su primitiva. Por ejemplo, ¿cómo nos damos cuenta qué función, al derivarla, nos da $\ln(x)$? Otros ejemplos incluyen $\arctan(x), \mathrm{arcsen}(x)$, etc. En estos casos debemos tomar a la función esta como u (ya que si la tomáramos como dv, ¡no sabríamos como calcular v!), y al dx como dv. Por lo tanto, $dv = dx$, con lo que $v = x$, y $u = f(x)$ donde f es esa función, por lo que $du = f'(x)dx$. Esto implica que tenemos que saber cómo derivar esas funciones (repasar las derivadas). Cuando hacemos eso, tenemos (por ejemplo para el arctan):

$$u = \arctan(x) \qquad du = \frac{1}{1+x^2}dx \tag{1}$$

$$dv = dx \qquad v = x \tag{2}$$

Escribiendo la integral por partes:

$$\int \arctan(x)dx = \arctan(x)x - \int \frac{1}{1+x^2}xdx \tag{3}$$

Ahora sólo debemos integrar la segunda. Está más fácil que antes porque si ahora hacemos sustitución en esta: $u = 1 + x^2$, $du = 2xdx$, y por lo tanto se reduce a:

$$\int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\ln(|u|) \tag{4}$$

Y reemplazando de nuevo en función de x:

$$\int \frac{1}{1+x^2}xdx = \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|)$$

Con lo que la integral que queríamos calcular nos queda:

$$\boxed{\int \arctan(x)dx = \arctan(x)x - \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|) + C} \tag{5}$$

Caso 2: Integrar el producto de una función que es proporcional a su derivada segunda con otra. Este es el caso por ejemplo del $\cos(x), \sin(x)$ y funciones de este tipo, que al derivarlas dos veces las volvemos a obtener cambiadas de signo. Por ejemplo:

$$\int \cos(x)e^{-x}dx$$

En estos casos tomamos a la función que vuelve a aparecer en su segunda derivada como u, y a la otra junto con el dx como el dv. Tenemos:

$$u = \cos(x) \qquad du = -\mathrm{sen}(x)dx \tag{6}$$

$$dv = e^{-x}dx \qquad v = -e^{-x} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Con esto:

$$\int \cos(x)e^{-x}dx = -\cos(x)e^{-x} - \int -e^{-x}(-\mathrm{sen}(x))dx \tag{9}$$

$$\int \cos(x)e^{-x}dx = -\cos(x)e^{-x} - \int e^{-x}\mathrm{sen}(x)dx \tag{10}$$

La integral que nos quedó del lado derecho ahora tampoco la podemos resolver. Pero ahí está el truco: aplicamos integración por partes sobre ésta nuevamente, con

$$u = \mathrm{sen}(x) \qquad du = \cos(x)dx \tag{11}$$

$$dv = e^{-x}dx \qquad v = -e^{-x} \tag{12}$$

Así:

$$\int \operatorname{sen}(x)e^{-x}dx = -\operatorname{sen}(x)e^{-x} - \int -e^{-x}(\cos(x))dx \tag{13}$$

$$\int \operatorname{sen}(x)e^{-x}dx = -\operatorname{sen}(x)e^{-x} + \int e^{-x}(\cos(x))dx \tag{14}$$

Reemplazando la ecuación (19) en el lado derecho de la (13):

$$\int \cos(x)e^{-x}dx = -\cos(x)e^{-x} - (-\operatorname{sen}(x)e^{-x} + \int e^{-x}(\cos(x))dx) \tag{15}$$

$$\int \cos(x)e^{-x}dx = -\cos(x)e^{-x} + \operatorname{sen}(x)e^{-x} - \int e^{-x}(\cos(x))dx \tag{16}$$

Acá tenemos que notar que la integral que nos quedó a la derecha, ¡es igual a la del lado izquierdo, que queremos calcular! Y como está restando, podemos pasarla sumando al primer miembro:

$$\int \cos(x)e^{-x}dx + \int \cos(x)e^{-x}dx = -\cos(x)e^{-x} + \operatorname{sen}(x)e^{-x} \tag{17}$$

$$2\int \cos(x)e^{-x}dx = -\cos(x)e^{-x} + \operatorname{sen}(x)e^{-x} \tag{18}$$

Finalmente, pasamos el 2 dividiendo, y tenemos el resultado (¡y nunca calculamos ninguna integral! Salvo para encontrar v a partir de dv).

$$\boxed{\int \cos(x)e^{-x}dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + C} \tag{19}$$

Notemos que esto sirve sólo si la otra función que aparece en la integral original (en este caso e^{-x}) no cambia al derivarla dos veces. Siempre analicemos bien cada caso.

Caso 3: Integrar una función multiplicada por un polinomio en x. Esta estrategia es simple: sabemos que al derivar un polinomio en x bajamos en 1 su orden; por ejemplo, si derivamos un polinomio de grado tres (con potencia más grande 3) obtenemos uno de grado 2. Entonces supongamos que tenemos una integral del tipo

$$\int p_n(x)e^x dx,$$

donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado n, entonces cuando integremos por partes una vez tomando $u = p_n(x)$ tendremos que resolver una integral parecida a

$$\int p_{n-1}(x)e^x dx,$$

y si seguimos aplicando integración por partes (siempre tomando el polinomio que nos va quedando como u) nos quedará una integral proporcional a

$$\int e^x dx$$

que sí sabemos resolver muy bien, ya que en algún momento $p(x) \propto x^0 = 1$. Ilustremos esto con un ejemplo:

$$\int (x^2+1)e^{3x}dx \tag{20}$$

Para este caso el polinomio es x^2+1, por lo tanto lo tomamos como u, y nos queda $e^{3x}dx$ como dv. Ahora debemos integrar este dv para hallar v, y para esto podemos usar método de sustitución[1]. Las funciones que nos quedan para la integración por partes son:

$$u = x^2 + 1 \qquad du = 2xdx \tag{25}$$

$$dv = e^{3x}dx \qquad v = \frac{e^{3x}}{3} \tag{26}$$

[1]Es este pie de página hallaremos v entonces. Probemos

$$w = 3x,$$
$$dw = 3dx \Rightarrow dx = dw/3$$

. (Aquí usé w para la sustitución en lugar de u para que no se nos confunda con el u de la integración por partes). Con esto:

$$v = \int e^{3x}dx = \int e^w \frac{dw}{3} \tag{21}$$

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^w dw \tag{22}$$

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^w \tag{23}$$

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} = v \tag{24}$$

Luego:

$$\int (x^2+1)e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)e^{3x} - \int \frac{e^{3x}}{3}2xdx \tag{27}$$

$$\int (x^2+1)e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}xdx \tag{28}$$

Ya bajamos el grado del polinomio de 2 a 1. Ahora lo bajamos de 1 a 0 y podremos integrar, como dijimos antes. Para ello tomamos otra vez al polinomio como u, y al $e^{3x}dx$ como dv (el mismo dv que recién). Así:

$$u = x \qquad du = dx \tag{29}$$

$$dv = e^{3x}dx \qquad v = \frac{e^{3x}}{3} \tag{30}$$

Y por tanto, aplicando integración por partes nuevamente sobre la integral que nos quedó:

$$\int e^{3x}xdx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx \tag{31}$$

$$\int e^{3x}xdx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx \tag{32}$$

Notemos que $\int e^{3x}dx$ ¡es la integral que ya calculamos para dv!. Sustituyamos entonces por su resultado, que ya lo conocemos:

$$\int e^{3x}xdx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx \tag{33}$$

$$\int e^{3x}xdx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x} \tag{34}$$

$$\int e^{3x}xdx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} \tag{35}$$

Recordemos que esta era sólo la integral que nos había quedado del lado derecho en la primera integración por partes que hicimos, por lo que para hallar el resultado final debemos reemplazar (35) en (28):

$$\int (x^2+1)e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) \tag{36}$$

Este ya es el resultado. Ahora sólo reordenaremos con fines estéticos:

$$\int (x^2+1)e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} \tag{37}$$

$$\int (x^2+1)e^{3x}dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}(x^2+1) - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) \tag{38}$$

$$\int (x^2+1)e^{3x}dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) \tag{39}$$

$$\boxed{\int (x^2+1)e^{3x}dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{11}{27}\right)} \tag{40}$$

Pero ninguna regla es sagrada ni absoluta, y siempre tenemos que analizar el caso particular. Por ejemplo, si nos dan para calcular

$$\int x^2\ln(x)dx,$$

aplicando lo que acabamos de decir, deberíamos tomar $u = x^2$ y $dv = \ln(x)dx$. Sin embargo, es bastante complicada de integrar esa dv para hallar la v (¡hay que hacerlo por partes también!), por lo que conviene un cambio de estrategia: definimos $u = \ln(x)$, $dv = x^2dx$, y aplicamos integración por partes, veremos que la integral que nos queda (gracias a que la derivada del $\ln(x)$ es $1/x$) se puede calcular. Se sugiere hacerlo como ejercicio siguiendo este método.