Pruebita 3

1) Hallar el área delimitada por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Primero encontramos los puntos de intersección de las curvas, ya sea gráficamente o analíticamente. Para hacerlo de la última forma, igualamos las dos funciones y despejamos

$$\begin{align} x^2 &= \sqrt{x} \tag{1} \\ x^4 &= x \tag{2} \\ x^4 - x &= 0 \tag{3} \\ x^3(x-1) &= 0 \tag{4} \end{align}$$

Las soluciones son entonces $x = 0$ y $x = 1$. Si dibujamos el gráfico (muy fácil), nos damos cuenta que $\sqrt{x}$ está por encima de x^2, por lo tanto la integral que queremos calcular es:

$$\begin{align} \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx &= \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)dx \tag{5} \\ &= \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \tag{6} \\ &= \left(\frac{1^{3/2}}{3/2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^{3/2}}{3/2} - \frac{0^3}{3}\right) \tag{7} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \tag{8} \end{align}$$

2) Hallar el volumen del sólido de revolución de la función $y = 2 - x$. ¿Qué cuerpo se forma? (Integrar entre x=0 y x=2). Si graficamos esa recta, vemos que entre ella, el eje y y el eje x se forma un triángulo (ordenada al origen $y = 2$ y abscisa $x = 2$). Es decir que el cuerpo que se formará al rotar será un cono de altura $x = 2$ y radio $y = 2$. Para hallar el volumen calculamos:

$$\begin{align} V &= \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx \tag{9} \\ &= \pi \int_0^2 (4 - 4x + x^2)dx \tag{10} \\ &= \pi \left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 \tag{11} \\ &= \pi \left[\left(4.2 - 2.2^2 + \frac{2^3}{3}\right) - \left(4.0 - 2.0^2 + \frac{0^3}{3}\right)\right] \tag{12} \\ &= \pi \left(8 - 8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi. \tag{13} \end{align}$$

3) Determinar si $\int_5^\infty \frac{1}{(x-2)^2} dx$ converge y en tal caso calcularla.

Para saber si converge, no es necesario usar criterios de comparación ya que la integral es fácil de calcular. La calculemos y veamos qué da:

$$\begin{align} \int_5^\infty \frac{1}{(x-2)^2} dx &= \lim_{t\to\infty} \int_5^t \frac{1}{(x-2)^2} dx \tag{14} \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_5^t (x-2)^{-2} dx \tag{15} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1}\Big|_5^t \tag{16} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{(x-2)^{-1}}{-1}\Big|_5^t \tag{17} \\ &= -\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{x-2}\right)\Big|_5^t \tag{18} \\ &= -\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{5-2}\right) \tag{19} \\ &= -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \tag{20} \end{align}$$

Ya que $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-2} = 0$.